Polinomios

Índice

Conocimientos previos

Responde a las siguientes cuestiones

1.

1. Definición

Definición: un polinomio es una suma de monomios.

Ejemplos: $4x + 1$ $\quad\quad$ $3x^2 - x + 1$

Los polinomios suelen notarse con letras mayúscula:

$P(x) = 4x + 1$ $\quad\quad$ $Q(x) = 3x^2 - x + 1$

Elementos de un polinomio

Grado: El exponente del monomio de mayor grado.
Coeficiente principal: El coeficiente del monomio de mayor grado.
Término independiente: El monomio de grado 0.

Ejemplo:

Polinomio	Grado	Coeficiente principal	Término independiente
$4x^2 - 3x + 1$	2	4	1
$x - 2x^4 - 3x^2$	4	-2	no tiene

Ejercicio 1: Completa la tabla

Polinomio	Grado	Coeficiente principal	Término independiente
$4x - 1$			
$3x - 4 + x^2$			
$3x^2 + x - 8$			

$x^3 - x^2 + x^4$			
$-x^3 + 2x + 1$			

Tipos de polinomios

Un polinomio está **ordenado** si empezando por la izquierda los exponentes aparecen ordenados de mayor a menor.

Ejemplo: $4x^2 - x + 1$ está ordenado
$5x + x^2 + 1$ no está ordenado

Un polinomio es **completo** si, después de ordenarlo, están todos los monomios intermedios entre el de mayor grado y el de menor grado.

Ejemplo: $4x^2 - x + 1$ es completo
$x^3 - 3x$ no es completo porque falta el monomio de grado 2

Ejercicio 2: Clasifica los siguientes polinomios en completos, incompletos, ordenados o desordenados

a) $4x^2 - 3x$
b) $-2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$
c) $1 + x$
d) $x^3 + x^4 - 2x + 3$
e) $4x^2 - 2x + 3$
f) $6x^5 + x^2 - x^3 + 8$

Ejercicio 3: Escribe:

a. Un polinomio ordenado de grado 2
b. Un polinomio desordenado de grado 3 incompleto
c. Un polinomio desordenado completo con término independiente 8
d. Un polinomio ordenado, completo, de grado 2 y coeficiente principal -2
e. Un polinomio desordenado, incompleto, de grado 3, coeficiente principal 7 y término independiente 5.

Valor numérico de polinomios

Calcular el valor numérico de un polinomio significa reemplazar la variables por un valor concreto.

Por ejemplo, si tenemos el polinomio $P(x) = 3x^2 - 2x + 5$ y reemplazo la x por 1 estoy calculando el valor numérico P(1)

$P(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 3 \cdot 1 - 2 + 5 = 3 - 2 + 5 = 6$

Ejercicio 4: Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios para $x = 1$, $x = -2$

a) $P(x) = x + 1$
b) $Q(x) = 2x - 3$
c) $R(x) = -3x^2 + 2x$
d) $S(x) = x^2 - 3x + 7$

2. Operaciones con polinomios

Suma

Se suman los monomios que sean semejantes de cada polinomio (los que tengan la misma parte literal)

Ejemplo: $A = 4x^2 + 2x - 7$ $\quad B = -2x + 1$

$A + B = 4x^2 + 2x - 2x - 7 + 1 = 4x^2 + 0x - 6$

Ejercicio 5: Con los siguientes polinomios calcula:

$A = 4x^2 + 3x + 1$, $\quad B = -5x + 1$, $\quad C = -4x^3 - 2x + 4$, $\quad D = 5x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x$,

$E = 2x^3 - 3x^2 + 9$

a) A + B
b) C + B
c) D + E
d) A + E
e) C + E
f) A + C
g) A + D
h) B + D

Resta

Si quiero calcular A - B, cambio el signo al polinomio B y luego sumo los polinomios.

Ejemplo: $A = 4x^2 + 2x - 7$ $\quad B = -2x + 1$

$-B = -(-2x + 1) = 2x - 1$

$A + (-B) = 4x^2 + 2x - 7 + 2x - 1 = 4x^2 + 4x - 8$

Ejercicio 6: Calcula:

$A = 4x^2 + 3x + 1$, $\quad B = -5x + 1$, $\quad C = -4x^3 - 2x + 4$, $\quad D = 5x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x$,

$E = 2x^3 - 3x^2 + 9$

a) A – B
b) A – C
c) A – D
d) A – E
e) C – D
f) C – E
g) D – E

Multiplicación

Multiplicación de un número por un polinomio: se multiplica el número por cada uno de los coeficientes del polinomio.

$$2 \cdot (-3x^2 + 4x - 1) = -6x^2 + 8x - 2$$

$$\begin{array}{r} -3x^2 + 4x - 1 \\ \cdot 2 \\ \hline -6x^2 + 8x - 2 \end{array}$$

Ejercicio 7: Con los siguientes polinomios calcula:

$A = 4x^2 + 3x + 1$, $B = -5x + 2$, $C = -4x^3 - 2x^2 + 4$, $D = -3x^3 + x^2 - 2x$,

a) $2 \cdot A$
b) $-3 \cdot B$
c) $-1 \cdot C$
d) $8 \cdot D$

Multiplicación de un monomio por un polinomio: se multiplica el monomio por cada uno de los monomios del polinomio (se multiplican los números y se suman los exponentes)

$$(-2x^2) \cdot (-3x^2 + 4x - 1) = 6x^4 - 8x^3 + 2x^2$$

$$\begin{array}{r} -3x^2 + 4x - 1 \\ \cdot(-2x^2) \\ \hline 6x^4 - 8x^3 + 2x^2 \end{array}$$

Ejercicio 8: Calcula

$A = 4x^2 + 3x + 1$, $B = -5x + 2$, $C = -4x^3 - 2x^2 + 4$, $D = -3x^3 + x^2 - 2x$,

a) $2x \cdot A$
b) $-3x^2 \cdot B$
c) $-x^3 \cdot C$
d) $8x^4 \cdot D$

Multiplicación de un polinomio por un polinomio:

$$\begin{aligned} (-2x + 1) \cdot (-3x^2 + 4x - 1) &= (-2x)\cdot(-3x^2 + 4x - 1) + 1 \cdot (-3x^2 + 4x - 1) \\ &= 6x^3 - 8x^2 + 2x - 3x^2 + 4x - 1 \\ &= 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} -3x^2 + 4x - 1 \\ \cdot(-2x + 1) \\ \hline -3x^2 + 4x - 1 \\ 6x^3 - 8x^2 + 2x \quad\quad \\ \hline 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 \end{array}$$

Ejercicio 9: Con los siguientes polinomios calcula:

$A = 4x^2 + 3x + 1$, $B = -5x + 2$, $C = -4x^3 - 2x^2 + 4$, $D = -3x^3 + x^2 - 2x$

a) $A \cdot B$
b) $A \cdot C$
c) $A \cdot D$
d) $B \cdot C$
e) $B \cdot D$
f) $C \cdot D$

División

De un monomio entre un polinomio: se divide el monomio entre los monomios del polinomio (se dividen los números y se restan los exponentes)

$(4x^3 - 6x^2 + 12x) : (-2x) = -2x^2 + 3x - 6$

$$\begin{array}{l|l} 4x^3 - 6x^2 + 12x & -2x \\ \cline{2-2} & -2x^2 + 3x - 6 \end{array}$$

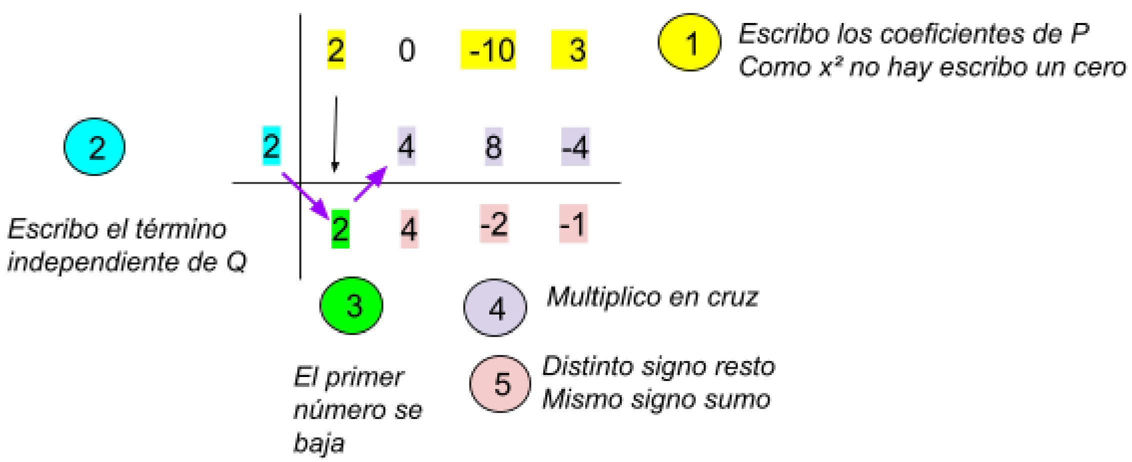
Ejercicio 10: Con los siguientes polinomios calcula:
$A = 4x^2 + 12x + 8$, $B = -5x^3 + 10x^2$, $C = -4x^3 - 2x^2 + 4x$, $D = -3x^5 + 9x^4 - 6x^3$

a) $A : 4$
b) $B : 5x^2$
c) $C : 2x$
d) $D : -3x^3$
e) $A : 2$
f) $B : 5x$
g) $C : 2$
h) $D : 3x^2$

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es un algoritmo que se utiliza para dividir un polinomio P(x) entre cualquier polinomio del tipo (x - a)

Ejemplo: Divide $P(x) = 2x^3 - 10x + 3$ entre $Q(x) = x - 2$



Identificación del cociente y resto

	2	0	-10	3	*Grado 3*
2		4	8	-4	
Grado 2	2	4	-2	-1	

Cociente $\qquad$ Resto

$2x^2 + 4x - 2$

$$P(x) = \text{Cociente} \cdot \text{Divisor} + \text{Resto}$$
$$P(x) = (2x^2 + 4x - 2) \cdot Q(x) + (-1)$$
$$P(x) = (2x^2 + 4x - 2) \cdot (x - 2) - 1$$

Ejercicio 11: Con los siguientes polinomios calcula

$P(x) = 3x^2 + 2x - 5$ $\qquad$ $Q(x) = x^3 - 2x - 1$

a) $P(x) : (x - 1)$
b) $Q(x) : (x - 1)$
c) $P(x) : (x - 2)$
d) $Q(x) : (x - 2)$
e) $P(x) : (x + 1)$
f) $Q(x) : (x + 1)$
g) $P(x) : (x + 2)$
h) $Q(x) : (x + 2)$

3. Factor común

Se trata de escribir el polinomio de una manera más simple, como un producto de un monomio y un polinomio de menor grado.

Ejemplo: Saca factor común en el polinomio $4x^2 + x$

$4x^2 + x = 4 \cdot \mathbf{x} \cdot x + \mathbf{x}$ $\qquad$ *los dos monomios que forman el polinomio tienen en común una x*

Entonces divido el polinomio entre el factor común x

$\mathbf{(4x^2+x) : x} = 4x + 1$

Así el polinomio de grado 2 original se puede escribir como un producto entre el factor común y el resultado de la división

$\mathbf{4x^2 + x = x \cdot (4x+1)}$

Otra forma de verlo:

$4x^2 + x = 4 \cdot x \cdot x + x$	*El coeficiente en el segundo monomio es 1*
$= 4 \cdot x \cdot x + 1 \cdot x$	*El factor común x sale del polinomio*
$= x \cdot (4 \cdot x + 1)$	*Se coloca delante de un paréntesis y dentro del paréntesis se escribe lo que queda del polinomio*

Ejercicio 12: Extraer factor común un número en los siguientes polinomios

a) $5x + 10$
b) $2x - 8$
c) $3x + 15$
d) $6x^2 - 4$
e) $8x^3 + 6$
f) $12x^2 - 2x + 6$
g) $15x^2 - 3x + 12$
h) $18x^2 - 12x + 6$

Ejercicio 13: Extraer factor común una variable en los siguientes polinomios

a) $8x + x^2$
b) $6x^3 - 8x$
c) $21x + 15$
d) $2x^3 - x^2 + 6x$
e) $5x^5 - 9x^2 + 2x$
f) $5x^4 - 2x^3 + 5x^2$
g) $7x^2 + 10$
h) $x^3 + x^2 - x$

Ejercicio 14: Extraer factor común un monomio en los siguientes polinomios

a) $15x^2 + 10x$
b) $2x^2 - 6x$
c) $5x^3 + 15x$
d) $6x^2 - 8x$
e) $8x^3 + 12x^2$
f) $12x^3 - 4x^2 + 2x$
g) $15x^4 - 6x^3 + 12x^2$
h) $15x^4 - 9x^3 + 6x$

4. <u>Identidades notables</u>

Existen algunos polinomios que tienen una expresión simplificada especial, una suma o resta elevada al cuadrado.

<u>Cuadrado de una suma</u>

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$

El primero al cuadrado + el segundo al cuadrado + el doble del primero por el segundo

Ejercicio 15: Desarrolla las siguientes identidades notables

a) $(x + 1)^2$
b) $(x + 2)^2$
c) $(x + 3)^2$
d) $(x + 4)^2$
e) $(x + 5)^2$
f) $(x + 6)^2$
g) $(x + 7)^2$
h) $(2x + 1)^2$
i) $(x^2 + 1)^2$
j) $x^2 + 64 + 16x$
k) $x^2 + 81 + 18x$

Cuadrado de una resta

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$

El primero al cuadrado + el segundo al cuadrado - el doble del primero por el segundo

Ejercicio 16: Desarrolla las siguientes identidades notables

a) $(x - 1)^2$
b) $(x - 2)^2$
c) $(x - 3)^2$
d) $(x - 4)^2$
e) $(x - 5)^2$
f) $(x - 8)^2$
g) $(x - 9)^2$
h) $(2x - 1)^2$
i) $(x^2 - 1)^2$
j) $x^2 + 36 - 12x$
k) $x^2 + 49 - 14x$

Suma por diferencia

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Ejercicio 17: Desarrolla las siguientes identidades notables

a) $x^2 - 36$
b) $x^2 - 1$
c) $x^2 - 9$
d) $x^2 - 4$
e) $x^2 - 49$
f) $x^2 - 25$
g) $x^2 - 16$
h) $x^2 - 64$
i) $(x + 9)(x - 9)$
j) $(x + 10)(x - 10)$
k) $(x^2 + 2)(x^2 - 2)$

5. Raíces de un polinomio

Un número **a** es raíz de un polinomio **P(x)** si **P(a) = 0**

Ejemplo: ¿Es $x = 2$ raíz del polinomio $P(x) = x^2 - 1$? ¿Es raíz $x = 0$? ¿Es raíz $x = 1$?

$P(2) = 2^2 - 1 = 3$ No es raíz
$P(0) = 0^2 - 1 = -1$ No es raíz
$P(1) = 1^2 - 1 = 0$ Es raíz

Ejercicio 18: Indica si los siguientes valores de x son raíz del polinomio $P(x) = x^2 - 2x + 1$.

a. $x = 1$
b. $x = 2$
c. $x = 0$
d. $x = -1$

6. Factorización de polinomios

Las raíces de un polinomio nos permite escribir el polinomio de una manera simplificada, es decir, nos permiten factorizar el polinomio.

El número de raíces de un polinomio es menor o igual al grado del polinomio.

Para factorizar polinomios podemos usar tres métodos: el factor común, las identidades notables o la regla de Ruffini. El objetivo de la factorización es escribir el polinomio como producto de polinomios del menor grado posible, preferentemente de grado 1, es decir de la forma $(x - a)$.

Ejemplo 1: Uso del factor común

$3x^2 + 6x = 3x \cdot (x + 2)$ El polinomio de grado 2 se ha factorizado como producto de dos polinomios de grado 1 usando el factor común

Ejemplo 2: Uso de las identidades notables

$4x^2 + 9 - 12x = (2x - 3)^2$ Se ha factorizado el polinomio (se ha escrito de forma más simple) usando las identidades notables

Ejemplo: Factoriza el polinomio $P(x) = 3x^2-5x+2$ usando la Regla de Ruffini

Para empezar a factorizar las posibles raíces del polinomio las tengo que buscar entre los divisores del término independiente.
En este caso el término independiente es 2, por tanto, sus raíces serán alguno de los divisores de 2: 1, -1, 2, -2.

Siempre voy a empezar a probar con 1 o -1.

Regla de Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & -5 & 2 \\ & & & \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

Paso 1: escribo los coeficientes del polinomio

El objetivo es que al final en esta posición haya un 0

Paso 2: Busco una posible raíz del polinomio

Empiezo probando con 1

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & -5 & 2 \\ 1 & & & \\ \hline & & & \end{array}$$

Las raíces del polinomio son los divisores del término independiente, en nuestro caso, tengo que probar con
1, -1, 2 y -2

Paso 3: El primer coeficiente se baja

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & -5 & 2 \\ 1 & & & \\ \hline & 3 & & \end{array}$$

Paso 4: Multiplico la raíz por el primer número y luego sumo

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & -5 & 2 \\ 1 & & 3 & \\ \hline & 3 & -2 & \end{array}$$

Paso 4: Multiplico la raíz por el segundo número y luego sumo

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & -5 & 2 \\ \mathbf{1} & & 3 & -2 \\ \hline & 3 & -2 & \mathbf{0} \end{array}$$

Para que el número de la izquierda sea una raíz el resultado final tiene que ser cero

Paso 5: escribo la factorización

	x^2	x	TI	
	3	-5	2	polinomio de grado 2
1		3	-2	
	3	-2	0	polinomio de grado 1
	x	TI		

Cada vez que aplico Ruffini le bajo un grado al polinomio. Entonces el del comienzo es de grado dos, el del final es de grado 1

Es el término independiente de un polinomio de grado 1 y se escribe con el signo opuesto (x - 1)

	3	-5	2
1		3	-2
	3	-2	0

Es un polinomio de grado 1 (3 x - 2)

Factorización

$3x^2 - 5x + 2 = (x - 1)(3x - 2)$

Ejercicio 19: Factoriza los polinomios

a. $x^2 - 2x - 3$
b. $x^2 - 2x + 1$
c. $3x^2 - 2x - 1$
d. $4x^2 - 4x + 1$
e. $5x^3 - 5x$
f. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
g. $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$